JIDeTEV- Año 2022 -ISSN 2591-4219

Modelo Matemático para la Fermentación Alcohólica de Mosto de Uva

Ibarra, María del Carmen *,[a], Miño Valdés, Juan Esteban [a], Herrera Garay, José L.[b]

[a] *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Oberá, Misiones, Argentina.*
[b] *Facultad de Ciencias Exactas, Quimicas y Natuarles, UNaM, Posadas, Misiones, Argentina*
ibarra@fio.unam.edu.ar, jemino53@gmail.com

Resumen

En la Asignatura Cálculo 1/ Matemática I (dictada en primer año, común a todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones) se estudian las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, y se presentan las técnicas analíticas de resolución, así como algunas aplicaciones a procesos físicos reales. El objetivo del trabajo ha sido desarrollar la Ecuación Logística como Modelo Matemático representativo de un proceso de fermentación alcohólica de mosto de uva *Isabella Tinto* para la elaboración de vinos. La metodología empleada fue encontrar y analizar la función solución, vinculando los conceptos matemáticos con su correspondiente interpretación en el proceso fermentativo. Se ha resuelto la Ecuación Diferencial, mediante técnicas analíticas desarrolladas en la Asignatura y se obtuvo así, una Función Solución que representó adecuadamente el proceso observado, dado que se comprobó empíricamente la efectividad del Modelo Matemático propuesto. De esta manera, se ofrece al estudiante una aplicación que puede resolver con las herramientas del Cálculo Diferencial e Integral, mostrando a la Matemática integrada a las disciplinas específicas de la Ingeniería.

Palabras Clave *– Curva Logística, Ecuación Diferencial, Fermentación Alcohólica, Modelo Matemático.*

1 Introducción

En la Asignatura Cálculo 1/Matemática I, dictada en primer año de las carreras de Ingeniería de la FI-UNaM, se estudian las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y algunas de sus aplicaciones, entre ellas, el *Crecimiento de Poblaciones*. Existen varios Modelos Matemáticos con Ecuaciones Diferenciales que representan la variación o crecimiento de una población respecto del tiempo.

El Modelo más sencillo plantea que el crecimiento de la población en función del tiempo es directamente proporcional a la cantidad de individuos presentes en cada instante:

$$\frac{dN}{dt} = K\,N(t) \tag{1}$$

donde: N es la población en cada instante de tiempo t *y* K es una constante positiva.

La Función Solución de (1) es una función exponencial natural:

$$N(t) = N_0\, e^{Kt} \tag{2}$$

donde: N_0 es la población inicial y e es la constante de Euler (e = 2,718281….)

*Autor en correspondencia.

Si bien este Modelo Exponencial es simple, también es limitado, dado que no considera ningún tipo de restricciones al crecimiento de la población y solamente es aplicable al desarrollo inicial; pero a medida que crece ésta, comienzan a aparecer factores limitantes como: competencia por alimentos, espacio físico, entre otros; por lo tanto este Modelo no es suficiente para explicar el desarrollo del proceso biológico completo.

Otro Modelo que se ajusta mejor al comportamiento del proceso experimental utiliza la denominada Ecuación Logística:

$$\frac{dN}{dt} = N(t)[a - b\,N(t)] \tag{3}$$

donde: a y b son constantes positivas.

La Función Solución de la Ecuación Diferencial no Lineal (3) se denomina Curva Logística y viene dada por la expresión:

$$N(t) = \frac{a\,N_0}{b\,N_0 + (a - b\,N_0)\,e^{-a\,t}} \tag{4}$$

Cabe destacar que las Ecuaciones Diferenciales anteriores, así como sus curvas solución, están tratadas en detalle en el texto del autor D. Zill, libro de referencia de la Asignatura [1].

En la Figura 1 se puede apreciar, que las curvas solución de ambos Modelos, se superponen al inicio del proceso, es decir para poblaciones relativamente pequeñas; pero medida que transcurre el tiempo, se van alejando y mientras la Curva Logística se va acercando a un máximo estable (población de equilibrio), la Curva Exponencial continúa su crecimiento ilimitado.

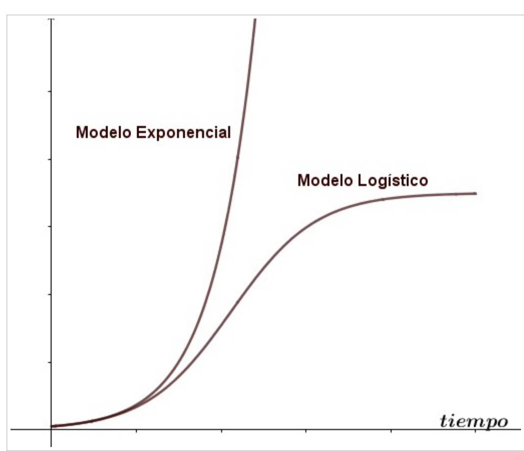

Fig. 1. Curvas Solución de Modelos Exponencial y Logístico

La resolución de una Ecuación Diferencial Logística no solamente implica el manejo de técnicas analíticas apropiadas, sino que consiste en un proceso muy valioso, que requiere de varios conceptos vistos en el transcurso de la Asignatura Cálculo 1/ Matemática I, como ser: Análisis de Funciones, Técnicas de Integración, Cálculo e interpretación de Límites y también cuestiones más básicas como Propiedades de Potencias y Logaritmos. Si bien el Modelo Logístico resulta muy interesante desde el punto de vista disciplinar, matemático, el principal valor radica en su capacidad para representar numerosos fenómenos o procesos físicos, donde se analiza la variación o crecimiento de una población respecto del tiempo, es decir, la rapidez con que se desarrolla.

En la Asignatura se asigna mucha importancia a las aplicaciones físicas de los conceptos desarrollados, para describir el comportamiento de los fenómenos naturales en el mundo que nos rodea. De esta manera se presenta al estudiante las primeras herramientas para el planteo y resolución de Modelos y Problemas Matemáticos. Como aplicación concreta de la Ecuación Logística se presenta a continuación un Modelo Matemático para la fermentación de mosto de uva en un proceso de elaboración de vinos de mesa. La resolución de esta Ecuación Diferencial, así como el análisis de la Función Solución, se pueden realizar de manera completa con los conceptos y técnicas desarrollados en la Asignatura.

2 Planteo y Resolución del Modelo Matemático

2.1 Planteo de la Ecuación Diferencial Logística

En la tesis doctoral: "*Desarrollo de una tecnología para elaborar vino blanco común con vitis no vinífera cultivada en Misiones, Argentina*" del Dr. J. E. Miño Valdés [2], se aborda el proceso de fabricación de vino de mesa con cepas de uvas cultivadas en la Provincia de Misiones (*Isabella Tinto* y *Niágara Rosada*). El proceso de fermentación consiste básicamente en la transformación de los azúcares de la fruta, en alcohol (principalmente Etanol) mediante la acción de levaduras (*Saccharomyces cerevisiae, S. Bayanus*) que se incorporan al mosto de uva. Se inicia el proceso con una población inicial de levaduras, que va creciendo de acuerdo a un Modelo Logístico, mediante el consumo de los azúcares (glucosa, fructosa y sacarosa), a la vez que va produciendo el alcohol. La Biomasa así generada sigue una ley de crecimiento logístico que tiene la estructura algebraica de (3), dada por la ecuación de Wang et al. [3]:

$$\frac{dX}{dt} = \mu_m X \left(1 - \frac{X}{X_m}\right) \tag{5}$$

donde: $X(t)$ es la concentración de biomasa (g/L); X_m es la concentración máxima de biomasa (g/L); X_0 es la concentración inicial de biomasa (g/L) y μ_m es el crecimiento específico máximo en condiciones de fermentación (1/h).

La Ecuación Diferencial (5) es de primer orden y requiere una condición inicial, que consiste en la concentración inicial de Biomasa, es decir la población inicial de levaduras: $X(0) = X_0$.

2.2 Resolución del Modelo Matemático: Función Logística

Todos los pasos necesarios para la resolución de (5) se detallan a continuación, así como las técnicas empleadas; ya que cada uno de ellos son desarrollados en la Asignatura y además así quedará en evidencia la riqueza conceptual y algebraica de la Ecuación Logística.

Paso 1. El Modelo Matemático dado por (5) es una Ecuación Diferencial Ordinaria no Lineal de primer orden, que se procede a resolver mediante la técnica de Separación de Variables.

$$\frac{dX}{dt} = \mu_m X \left(1 - \frac{X}{X_m}\right). \qquad \frac{dX}{X\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} = \mu_m \, dt . \qquad \int \frac{dX}{X\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} = \int \mu_m \, dt \tag{6}$$

Paso 2. Para resolver la integral del lado izquierdo de la última igualdad de (6), se aplica la técnica de Descomposición en Fracciones Simples, dado que el integrando es una Función Racional (con raíces reales simples).

$$\frac{1}{X\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} = \frac{A\left(1 - \frac{X}{X_m}\right) + B X}{X\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} . \qquad A\left(1 - \frac{X}{X_m}\right) + B X = 1 \tag{7}$$

Paso 3. Para hallar las constantes A y B en la última ecuación de (7), es conveniente asignar a la variable X , los valores que anulan cada uno de los términos del lado izquierdo:

$$X = 0: \quad A = 1 \qquad\qquad X = X_m: \quad B = \frac{1}{X_m} \tag{8}$$

Paso 4. Ahora es posible hallar las Primitivas de la Integrales planteadas en (6):

$$\int \frac{dX}{X\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} = \int \mu_m \, dt . \qquad \int \left[\frac{1}{X} + \frac{1/X_m}{\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)}\right] dX . \qquad \int \frac{dX}{X} + \frac{1}{X_m} \int \frac{dX}{\left(1 - \frac{X}{X_m}\right)} \tag{9}$$

Ambas integrales planteadas en la última expresión de (9) tienen como integrando una Función Racional, con numerador constante y denominador lineal, de manera que sus Primitivas serán logaritmos naturales (de base e. La última integral planteada en (9) no es inmediata, sino que requiere de la Técnica de Sustitución:

$$u = 1 - \frac{X}{X_m}. \qquad du = -\frac{dX}{X_m}. \qquad dX = -X_m \, du \tag{10}$$

Reemplazando (10) en (9), es posible resolver las integrales indefinidas:

$$\int \frac{dX}{X} + \frac{1}{X_m} \int \frac{dX}{(1-\frac{X}{X_m})} = \int \frac{dX}{X} - \int \frac{du}{u} = \ln X - \ln(1-\frac{X}{X_m})$$
$$\ln X - \ln(1-\frac{X}{X_m}) = \mu_m t + C \tag{11}$$

Paso 5. Para hallar la Constante de Integración C, se aplica la Condición Inicial del problema ($t = 0$, $X = X_0$) y luego propiedades de logaritmos:

$$\ln X_0 - \ln(1-\frac{X_0}{X_m}) = C. \qquad C = \ln(\frac{X_0}{1-\frac{X_0}{X_m}}) = \ln(\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0}) \tag{12}$$

Paso 6. Reemplazando (12) en la última igualdad de (11), se encuentra la Función Solución del Modelo Matemático dado por (5):

$$\ln X - \ln(1-\frac{X}{X_m}) = \mu_m t + \ln(\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0}) \tag{13}$$

Paso 7. Si bien ya se consiguió resolver la Ecuación Diferencial (5), la expresión (13) de su Función Solución es implícita y para hallar la forma explícita es necesario despejar X(t), lo cual requiere de ciertos pasos algebraicos y la aplicación de algunas propiedades básicas de logaritmos y exponenciales:

$$\ln X - \ln(1-\frac{X}{X_m}) = \mu_m t + C. \qquad \ln(\frac{X}{1-\frac{X}{X_m}}) = \mu_m t + \ln(\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0})$$

$$\frac{X}{1-\frac{X}{X_m}} = e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0}. \qquad \frac{X\, X_m}{X_m - X} = e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0}. \qquad X\, X_m = e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0}(X_m - X) \tag{14}$$

$$X\, X_m = e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0} X_m - e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0} X. \qquad X\, X_m + e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0} X = e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0} X_m$$

$$X[1 + e^{\mu_m t}\frac{X_0}{X_m - X_0}] = e^{\mu_m t}\frac{X_0\, X_m}{X_m - X_0}. \qquad X[X_m - X_0 + e^{\mu_m t}\, X_0] = e^{\mu_m t} X_0\, X_m$$

Y así, resulta finalmente la expresión explícita de la Función Solución de la Ecuación Diferencial, que representa la Biomasa (población de levaduras) en función del tiempo de fermentación:

$$X(t) = \frac{e^{\mu_m t} . X_0 X_m}{X_m - X_0 + e^{\mu_m t} X_0} \tag{15}$$

La Función Solución (15) no tiene exactamente la estructura algebraica de la Curva Logística (4), pero se puede llegar a ella mediante un paso algebraico sencillo, que consiste en dividir numerador y denominador por la exponencial:

$$X(t) = \frac{e^{\mu_m t} . X_0 X_m}{X_m - X_0 + e^{\mu_m t} X_0} = \frac{X_0 X_m}{X_0 + (X_m - X_0) e^{-\mu_m t}} \tag{16}$$

Haciendo la analogía entre las expresiones (4) y (15) se observa que: $a = X_m$ y $b = 1$.

Paso 8. Una vez encontrada la Función Solución de la Ecuación Diferencial (Modelo Matemático) es importante detenerse unos instantes para interpretar esta expresión algebraica en su contexto, y preguntarse: *¿cuál es el dominio? ¿cuál es la variable independiente y qué representa? ¿cuál es la variable dependiente y qué representa? ¿qué representan las constantes que aparecen en la solución? ¿presenta intersecciones con los ejes? ¿qué interpretación física tienen estas intersecciones? ¿qué interpretación física tiene la asíntota horizontal?*

Paso 9. Luego de determinar los parámetros más relevantes de la Función Solución X(t), es importante realizar la representación gráfica, para lo cual es necesario asignarle valores a las constantes, que se obtienen de forma empírica y dependen de las características del proceso de fermentación, temperatura, tipo de uvas, tipo de levaduras, etc. Para la fermentación de mosto de uva *Isabella Tinto* a 18^0C y utilizando levaduras del tipo *S. Bayanus*; los valores que asumen éstas constantes son: $X_m = 8$ (g/L) ; $\mu_m = 0{,}04$ (1/h) ; $X_0 = 0{,}15$ (g/L) y la Función Solución finalmente resulta:

$$X(t) = \frac{e^{0,04\,t} . 1{,}20}{7{,}85 + 0{,}15\, e^{0,04\,t}} \tag{17}$$

Paso 10. El mosto contiene tres tipos de azúcares: Glucosa, Fructosa y Sacarosa; y este es el orden de preferencia para el consumo de las levaduras, proceso que deriva en la producción de alcohol (principalmente Etanol). La producción de Etanol también se ajusta a un Modelo Logístico, directamente asociado con el Modelo de producción de Biomasa, pero con un cierto retardo Δt (1/h), este retraso se encuentra de forma empírica y para este proceso fue de 14,56 (1/h).

En la Figura 2 se representan las Curvas Logísticas del Crecimiento de la Biomasa y del Etanol, para un proceso fermentativo con mosto de *Isabella Tinto* a 18^0C, utilizando levaduras del tipo *S. Bayanus* y corresponden a la formación de Etanol mediante consumo de Glucosa, con lo cual se explica el 50% del Etanol producido en el proceso fermentativo.

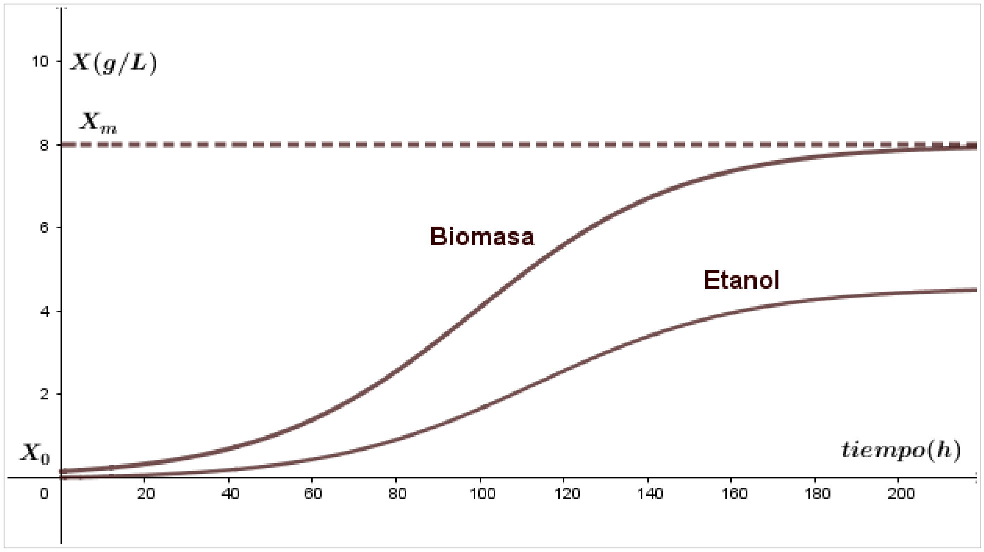

Fig. 2. Curvas de Crecimiento de Biomasa y Etanol

Paso 11. Otro elemento importante de la Función Solución dada por (17) es la Asíntota Horizontal ($y = X_m$) que indica el comportamiento de la Biomasa para tiempos de fermentación muy prolongados y muestra como la curva se acerca a su máxima concentración. Analíticamente esta Asíntota se obtiene aplicando Límite al Infinito a la función X(t) y se resuelve mediante la Regla de L'Hopital - una técnica muy poderosa del Cálculo Diferencial-:

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = \lim_{t \to \infty} [\frac{e^{\mu_m t} . X_0 \, X_m}{X_m - X_0 + e^{\mu_m t} \, X_0}] = \lim_{t \to \infty} [\frac{e^{\mu_m t} . X_0 \, X_m \, \mu_m}{\mu_m \, e^{\mu_m t} \, X_0}] = X_m \tag{18}$$

3 Conclusiones

Como se aprecia en el desarrollo anterior, la Ecuación Logística es muy valiosa desde el punto de vista matemático, ya que involucra en su resolución una serie de conceptos y herramientas algebraicas del Cálculo Diferencial e Integral, ejes principales de la Asignatura Cálculo 1/ Matemática I. Así, esta Ecuación Diferencial y su Función Solución - Curva Logística - , reúnen las condiciones para ser presentadas como instancia integradora en la Asignatura, cuya resolución atraviesa varios de los temas que se desarrollan a lo largo de la cursada y así, el estudiante tiene la posibilidad de vincular conceptos, algoritmos y gráficas; apreciando la correlación entre los resultados analíticos y el comportamiento gráfico de la curva, lo cual toma especial relevancia cuando la situación problemática presentada corresponde a un proceso físico real y concreto, como en este caso.

La presentación de un Modelo Matemático, representativo de un proceso o fenómeno específico, es extremadamente valioso, ya que muestra a la Matemática como disciplina integrada a las demás Ciencias.

El Modelo Matemático presentado en este artículo, tiene además el valor de haber demostrado su efectividad en la práctica, describiendo exitosamente el proceso fermentativo en la elaboración de vinos de mesa. El Modelo Logístico explica adecuadamente tanto la formación de Biomasa, como la producción de alcohol. El proceso de fermentación presentado, corresponde a la formación de Etanol mediante el consumo de Glucosa, con lo cual se explica el 50% de la producción total del alcohol.

Referencias

[1] D. Zill, "Cálculo de una Variable," 4ta ed., McGraw-Hill, 2011.

[2] J. E. Miño Valdés, "Desarrollo de una tecnología para elaborar vino blanco común con vitis no vinífera" Ph.D. disertación, Dpto. Ing. Química, Universidad Central Marta Abreu de las Villas, Cuba, 2012.

[3] D. Wang, Y. Xu, J. Hu, G. Zhao "Fermentation kinetics of different sugars by apple wine yeast Saccharomyces cerevisiae," J. Inst. Brew, 2004.