



Simulación Numérica del Comportamiento Dinámico de una Boya Sumergida Modelada Mediante Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas

Julian Medina^{a,b,*}, Mario Alberto Storti^{b,c}, Hugo Guillermo Castro^{a,b}

^a Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Nordeste (UNNE), Resistencia, Chaco, Argentina.

^b Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

^c Centro de Investigación en Métodos Computacionales CIMEC (UNL-CONICET), Santa Fe, Santa Fe, Argentina
e-mails: julianmedina009@gmail.com, mario.storti@gmail.com, hgcastro@gmail.com

Resumen

Los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas son el caso general de Sistemas de ecuaciones diferenciales, debido a que, además de las ecuaciones diferenciales se encuentran ecuaciones algebraicas. Este tipo sistemas de ecuaciones se utilizan para el modelado de fenómenos en los cuales algunas de las variables intervinientes en el problema presentan algún tipo de restricciones o ligaduras.

La presente propuesta consiste en la implementación de algoritmos para la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales algebraicas, los cuales requieren la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales y no lineales dependiendo de la naturaleza y la magnitud del problema a resolver. Para este estudio nos centraremos en problemas de dinámica de sistemas de partículas vinculadas, modelando distintos sistemas como por ejemplo péndulos con varios grados de libertad.

La dinámica de un sistema de masas vinculadas puede representar cuerpos sólidos o cadenas. Las restricciones se resuelven con la técnica de los multiplicadores de Lagrange, de manera que en cada paso de iteración hay que resolver un sistema de ecuaciones no lineales por medio de, por ejemplo, el método de Newton.

El modelado de sistemas multicuerpos o de partículas vinculadas mediante sistemas de ecuaciones algebraicas diferenciales se utilizó para el modelado del comportamiento dinámico de una boya sumergida. Se realizó la comparación de los resultados obtenidos de la simulación numérica con resultados experimentales.

Palabras Clave *Sistemas de masas vinculadas, Dinámica de Sólidos Rígidos, Ecuaciones Diferenciales Algebraicas, Sistemas de Ecuaciones Lineales y No Lineales*

1 Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo el modelado de un cuerpo rígido para el análisis de su comportamiento dinámico mediante la transformación del cuerpo en un sistema de partículas vinculadas por medio de restricciones.

El modelado matemático de la dinámica de sistemas de partículas vinculadas se realiza mediante Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas, en donde las ecuaciones del movimiento de cada particular es una ecuación diferencial y la vinculación entre partículas se pondera mediante restricciones o ligaduras, las cuales son ecuaciones algebraicas.

En este trabajo se desarrollan ecuaciones que modelan la dinámica de las partículas vinculadas y su discretización numérica, formulación que se encuentra implementada en la librería “prtclsys” desarrollada en el lenguaje de programación C++ por el Dr. Mario Storti.

El caso de estudio que aborda este trabajo consiste en la interacción fluido estructura de una boya totalmente sumergida dentro de un recipiente lleno de agua. El recipiente posee desplazamiento en su base lo que produce que la boya se excite por la interacción con el fluido que la rodea produciendo que esta se desplace.

Para la verificación de los resultados obtenidos de la simulación se contrastó con resultados obtenidos del análisis experimental realizado en el DIMEC de la Universidad de Santiago de Chile cuyos resultados se encuentran en [1],[2] y [3].

1.1

2 Modelado Matemático de la Dinámica de sistemas de Partículas

2.1 *Conceptos Básicos*

Para comenzar el modelado matemático de la dinámica de sistemas de partículas, es necesario definir algunos elementos que van a ser estudiados. Estos elementos son:

- **Grados de libertad:** Es el número de magnitudes que determina de manera unívoca la posición de un sistema.
- **Coordenadas generalizadas:** Es el conjunto de magnitudes que definen completamente la posición de un sistema.
- **Velocidades generalizadas:** Son las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas.
- **Energía cinética:** Es la energía que depende de la velocidad de las partículas en movimiento.
- **Energía potencial:** Es la energía que depende solamente de las coordenadas de partículas, es decir de su posición.

2.2 Principio de Mínima Acción - Ecuaciones del Movimiento

Consideremos un sistema formado por un conjunto finito de puntos, cuya disposición o configuración en el espacio queda definida por completo, en el instante t por medio del vector

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n \quad (1)$$

El Principio de Mínima Acción o Principio de Hamilton establece que de todas las posibles trayectorias entre dos posiciones $q(t_1)$ y $q(t_2)$, el sistema evoluciona según aquella que minimice el funcional

$$F(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} W dt \quad (2)$$

Donde L es la función Lagangiana, y está definida como

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q) \quad (3)$$

y W es el trabajo realizado por las fuerzas generalizadas, que no provienen de un potencial estacionario.

El funcional en estudio, es estacionario si su variación es nula. Entonces se debe cumplir la siguiente condición:

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (4)$$

Para todas las variaciones δq , compatibles con los vínculos y nulas en t_1 y t_2 . Donde $\delta W = \delta q^T f$ donde f son las fuerzas no conservativas, y δL se calcula como

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \quad (5)$$

Entonces la variación del funcional queda definida como

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta q^T f dt = 0 \quad (6)$$

Trabajando la expresión anterior queda

$$\delta F \int_{t_1}^{t_2} \delta q^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + f \right) dt = 0 \quad (7)$$

Como esto es válido para toda variación δq entonces tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + f = 0 \quad (8)$$

La expresión anterior representa un sistema de ecuaciones diferenciales conocidas como las ecuaciones de Lagrange, las cuales describen el movimiento de un sistema de partículas libres o de coordenadas independientes.

Cuando las coordenadas son dependientes, las ecuaciones de Lagrange no son necesariamente nulas y existirán unas restricciones al movimiento de las partículas $\Phi_i(q)$, agrupadas en el vector

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 = 0 \\ \vdots \\ \Phi_i = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m = 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^m \quad (9)$$

Para introducir el efecto de las restricciones, se debe incluir un término más en el funcional F

$$F^*(q, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} W dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda^T \Phi(q) dt \quad (10)$$

Donde

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_i = 0 \\ \vdots \\ \lambda_m = 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^m \quad (11)$$

es un vector de valores arbitrarios que no alteran el resultado del funcional.

Aplicando el principio de mínima acción se llega a la expresión

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + f + \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \lambda = 0 \quad (12)$$

que corresponde a las ecuaciones de Lagrange para sistemas de partículas con Restricciones. Este método para incorporar las restricciones se conoce como el método de los multiplicadores de Lagrange.

A partir de estas ecuaciones podemos plantear el problema del modelado de sistemas multicuerpo.

La energía cinética de un sistema multicuerpo se determina como

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (13)$$

donde M es la matriz de masas del sistema y U(q) es la energía potencial o de posición y solamente depende de la posición.

Entonces la Lagrangiana del sistema queda definida por

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - U(q) \quad (14)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange y las restricciones tenemos

$$\begin{aligned} M\ddot{q} - \frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \lambda &= f \\ \Phi(q) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$\partial U/\partial q$ son fuerzas que derivan de un potencial y f el resto de las fuerzas aplicadas al sistema.

Agrupando las fuerzas exteriores en una sola tenemos

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + F(q, \dot{q}) - \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \lambda &= 0 \\ \Phi(q) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Esas expresiones son un conjunto de n ecuaciones diferenciales con m ecuaciones algebraicas, es decir, es un sistema DAE (Differential-Algebraic Equations) que describe el movimiento el sistema de partículas vinculadas.

2.3 Restricciones o Ligaduras

Dado un sistema de n partículas vinculadas con posición q_j , masa m_j y fuerzas f_j . Estas partículas, al estar vinculadas entre sí, existen m restricciones $\Phi_i(q_j) = 0$ sobre las posiciones de las partículas $j - j'$. Estas restricciones pueden ser que el par de partículas $j - j'$ estén ligadas por un segmento fijo, es decir, manteniendo siempre una distancia L entre ellas

$$\Phi(q_j) = L^2 - \|q_j - q'_j\|^2 = 0 \quad (17)$$

También puede ser que el movimiento de una partícula esté restringido sobre un determinado plano

$$\Phi(q_j) = n \cdot (q_j - q_0) = 0 \quad (18)$$

Donde n es la normal al plano y q_0 es la coordenada de un punto que pertenece a ese plano

2.4 Modelado Numérico

Las ecuaciones del movimiento del sistema y las restricciones puestas juntas como un sistema DAE

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + F(q, \dot{q}) - \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \lambda &= 0 \\ \Phi(q) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son ecuaciones de 2° orden. Para la solución numérica de este problema realizamos un cambio de variables para reducir este sistema a un sistema de ecuaciones diferenciales de 1° orden.

Tomando

$$v = \dot{q} \quad (20)$$

Entonces el sistema DAE queda definido como

$$\begin{aligned} M\dot{v} + F(q, v) - \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \lambda &= 0 \\ v - \dot{q} &= 0 \\ \Phi(q) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Compactando la notación, el sistema queda como

$$R(y, \dot{y}, \lambda, t) = 0 \quad (22)$$

Con

$$y = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} \quad (23)$$

2.5 Discretización del Sistema DAE

Para la discretización temporal del sistema de ecuaciones utilizamos una regla del tipo trapezoidal α -generalizada aproximando y e \dot{y} como

$$\begin{aligned} \dot{y}^\alpha &\approx \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} \\ y^\alpha &\approx (1 - \alpha)y^n + \alpha y^{n+1} \end{aligned} \quad (24)$$

quedando como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales por cada paso de tiempo

$$R(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, \lambda, t) = 0 \quad (25)$$

2.6 Solución del Sistema de Ecuaciones No Lineales

Para la solución del sistema de ecuaciones no lineales en cada paso de tiempo utilizamos el Método de Newton, el cual consiste en

$$\begin{aligned} R(X) &= 0 \\ X^n &= X^{n-1} - J^{-1}R(X^{n-1}) \end{aligned} \quad (26)$$

Donde X es el vector de las incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (27)$$

y J es la matriz Jacobiana de R

$$J = \frac{\partial R}{\partial X} = \left(\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} + \alpha \frac{\partial R}{\partial y} \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) \quad (27)$$

Las contribuciones de cada variable al Jacobiano son

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F}{\partial q} + \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} & \frac{\partial F}{\partial V} \\ 0 & -I \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

2.7 Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

La resolución del Sistema de Ecuaciones No Lineales, utilizando el método de Newton, requiere que por cada iteración se resuelva el sistema de ecuaciones lineales que se muestra a continuación

$$-Js = R(X^{n-1}) \quad (29)$$

En donde

$$s = X^{n-1} - X^n \quad (30)$$

3 Caso de Estudio

3.1 Planteo del caso de estudio

El problema a analizar es el de una boya esférica totalmente sumergida dentro de un recipiente cúbico. El fluido que rodea a la boya es agua.

El contenedor donde se encuentra sumergida la boya es excitado por medio de una mesa vibratoria, la cual produce que la base se desplace con un movimiento armónico simple.

Se analiza como el movimiento del recipiente se transmite hacia la boya debido a la interacción entre el fluido y la boya y las fuerzas que el fluido ejerce sobre la boya durante esta interacción.

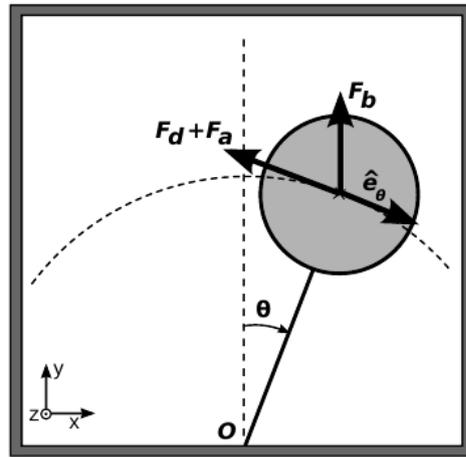


Fig. 1. Esquema de las fuerzas del fluido actuando sobre la boya sumergida- Modelo de un grado de libertad (Imagen extraída de [1]).

Este problema se modela, de manera aproximada, mediante la siguiente ecuación diferencial

$$I_s \ddot{\theta} = m_s g L \sin \theta - m_s a_{\text{tank}} L \cos \theta - m_{f1} g L \sin \theta - m_{f1} a_{\text{tank}} L \cos \theta - m_a L^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{5} \rho_f |v|^2 \text{sign}(v) C_d A_r L \quad (31)$$

Donde v es la velocidad tangencial de la boya, la cual se determina como

$$v = L \ddot{\theta} \quad (32)$$

Esta ecuación depende de inercia del sólido I_s , de la masa del sólido y del fluido m_s y m_{f1} respectivamente, la aceleración del tanque a_{tank} y de la masa agregada m_a y del coeficiente de arrastre de la boya C_d .

La solución de esta ecuación diferencial se puede obtener por medio de cualquier método de integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

3.2 Modelo Experimental

Los datos del análisis experimental fueron extraídos de [1]. Donde se describe la configuración del experimento.

El experimento consiste en una esfera de silicona (boya), la cual posee un diámetro $D=0.1[m]$ y una densidad de $366.69[kg/m^3]$ inmersa en un tanque cúbico fabricado en acrílico de dimensiones cuyas dimensiones son $0.38 \times 0.38 \times 0.4[m]$, el cual está lleno de agua. La boya está vinculada con la base del tanque por medio de un hilo de $0.16[m]$. El tanque se encuentra montado sobre una mesa vibrante (Shake-Table II – DIMEC/USACH), la cual es la encargada de producir el movimiento de excitación de la boya. La frecuencia de oscilación es variada desde $0.5Hz$ hasta $1.5Hz$.

El objetivo de este experimento fue el estudio de los movimientos de la boya a diferentes condiciones de oscilación. Para realizar esto se utilizó una cámara de alta velocidad con una resolución de 800×800 píxeles y que toma 120 imágenes por segundo, lo cual fue suficiente para capturar el movimiento de la boya. A partir del análisis de las imágenes capturadas se procedió a realizar el análisis del movimiento de la boya

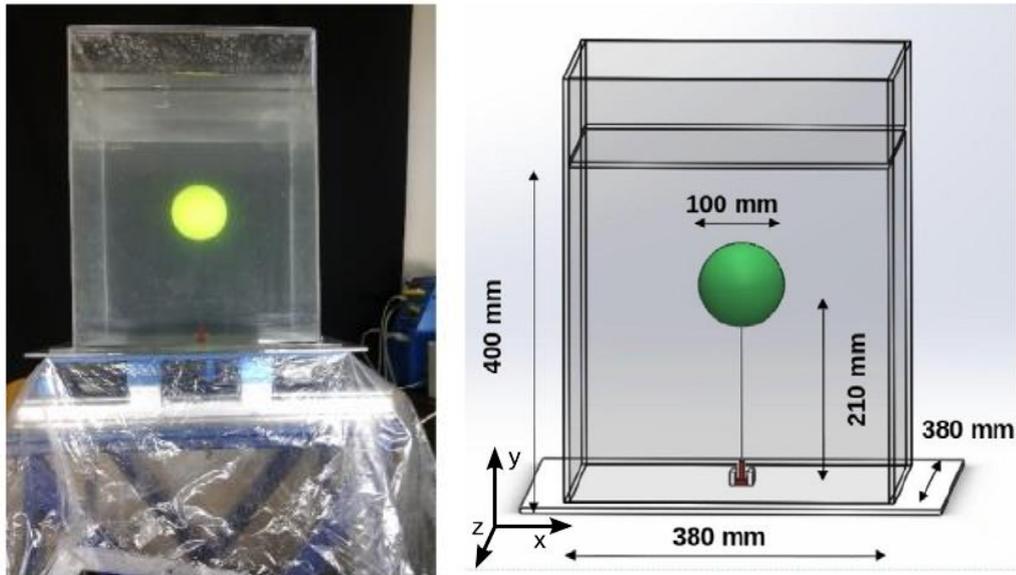


Fig. 2. Configuración experimental (Imagen extraída de [1]).

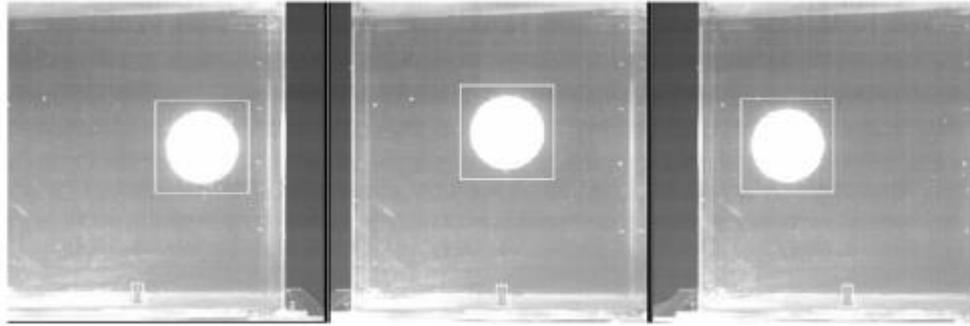


Fig. 3. Captura de movimiento (Imagen extraída de [1])

3.3 Modelo Numérico

Para la resolución numérica del comportamiento dinámico de la boya sumergida, se procedió a modelar la boya como un sistema de masas vinculadas por medio de restricciones de distancia.

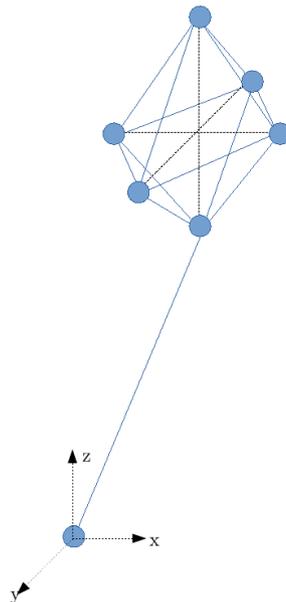


Fig. 4. Modelo de la boya y cuerda de anclaje como sistema de masas vinculadas por restricciones de distancia

El cuerpo de la boya se modeló como un octaedro, en cuyos vértices se encuentran ubicadas masas equivalente.

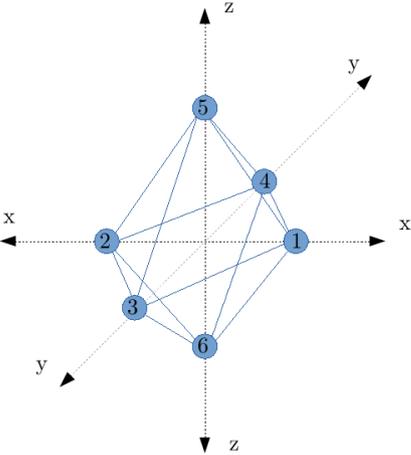


Fig. 5. Boya modelada como un octaedro de masas

Las coordenadas y las magnitudes de las masas que conforman el octaedro se determinó de forma tal que el tensor de inercia y la masa total del octaedro sea igual al tensor de inercia y masa de la boya.

4 Resultados Obtenidos

En [3] se presentan los resultados obtenidos en el análisis experimental de la boya, en donde se presentan las gráficas de desplazamientos de la boya para diferentes frecuencias de vibración del tanque, las cuales se muestran a continuación.

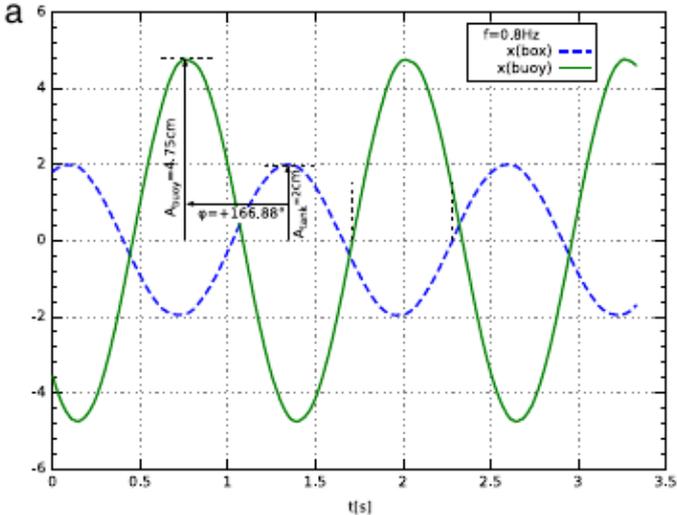


Fig. 6. Desplazamientos de la boya y del tanque - frecuencia 0.8Hz (Imagen extraída de [1]).

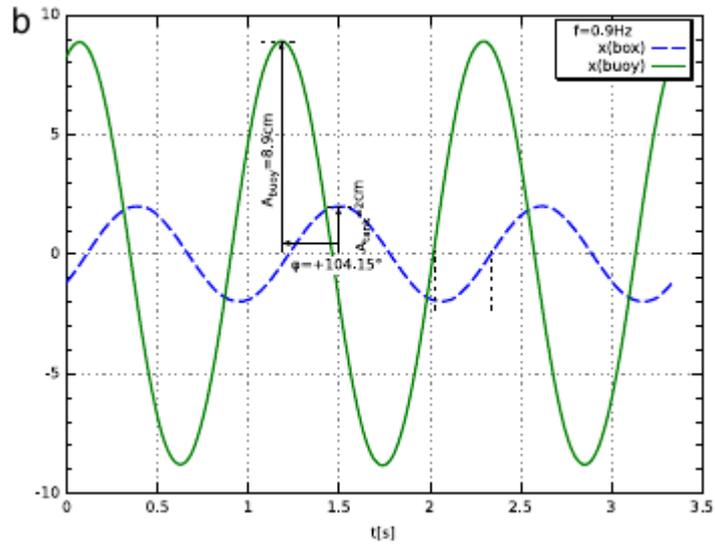


Fig. 7. Desplazamientos de la boya y del tanque - frecuencia 0.9Hz (Imagen extraída de [1]).

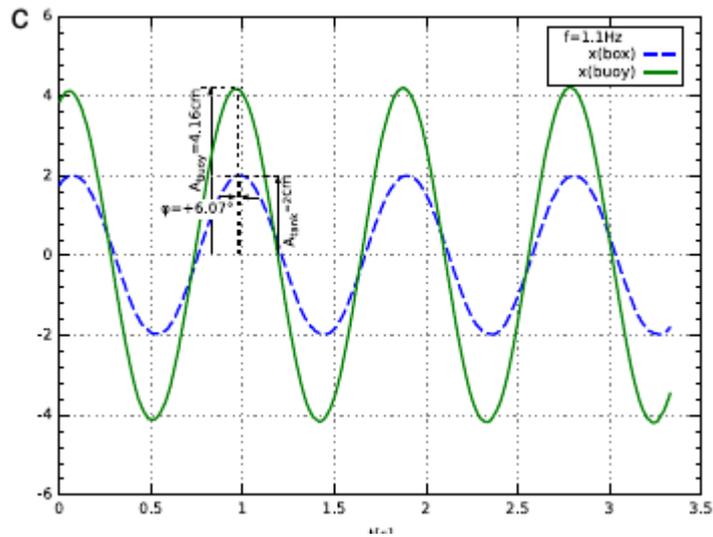


Fig. 8. Desplazamientos de la boya y del tanque - frecuencia 1.1Hz (Imagen extraída de [1])

Además, se muestran gráficas de las amplitudes de los desplazamientos de la boya y las diferencias de fases entre el desplazamiento de la boya y el desplazamiento del tanque para diferentes frecuencias

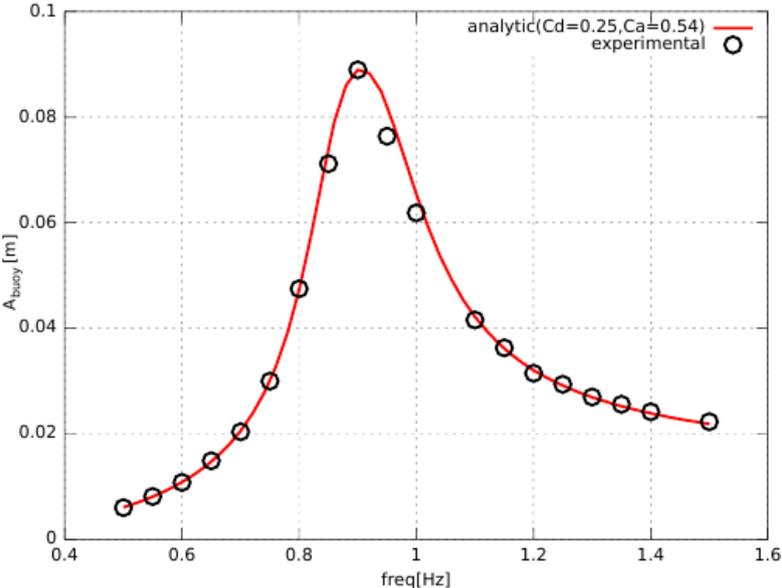


Fig. 9 Resultados analíticos vs experimentales – Amplitud de desplazamiento de la boya a diferentes frecuencias (Imagen extraída de [1]).

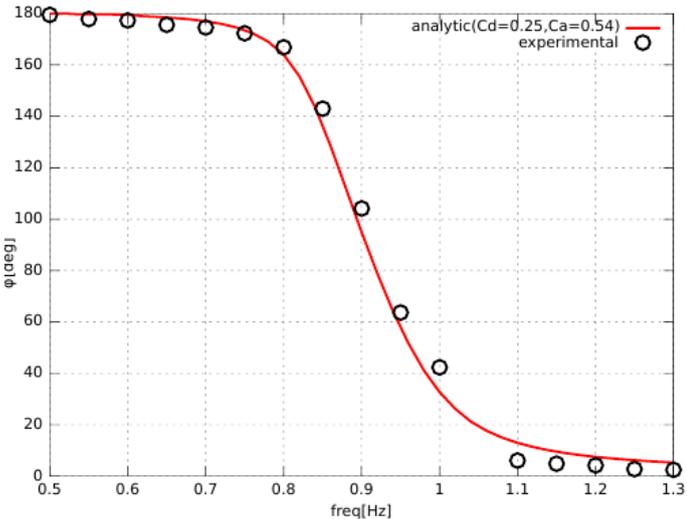


Fig. 10. Resultados analíticos vs experimentales – Desfase a diferentes frecuencias (Imagen extraída de [1]).

Los resultados obtenidos de la simulación numérica se muestran en las siguientes figuras

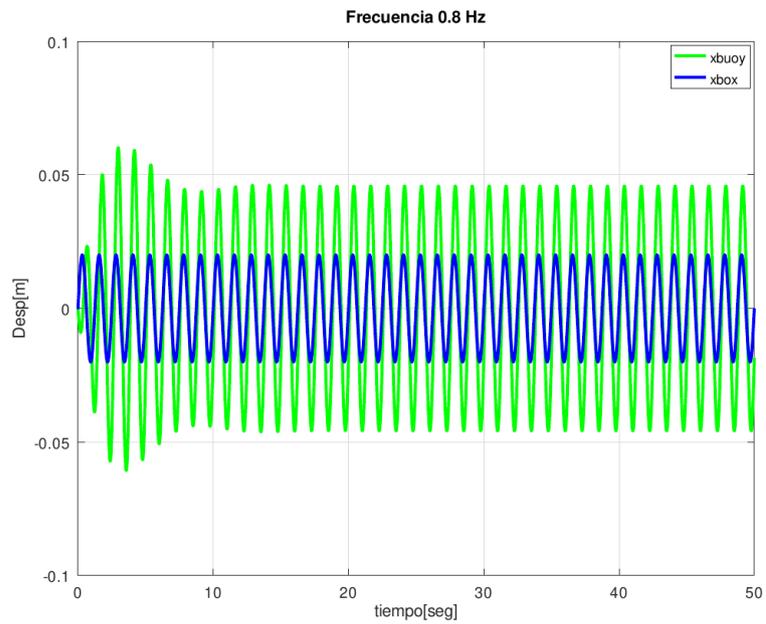


Fig. 11. Desplazamientos de la boya y del tanque - frecuencia 0.8Hz

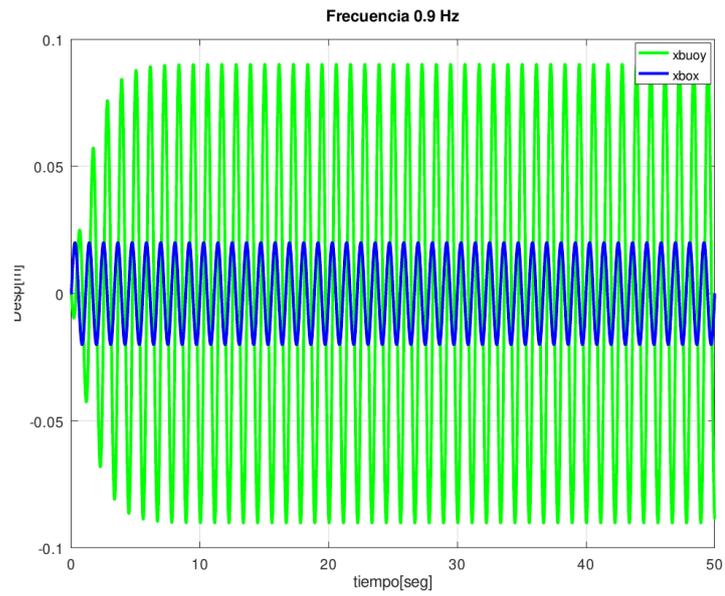


Fig. 12. Desplazamientos de la boya y del tanque - frecuencia 0.9Hz

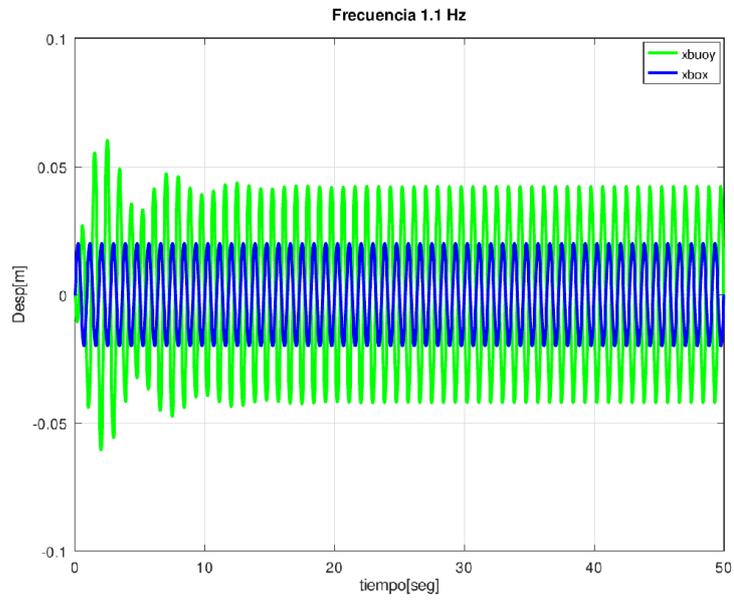


Fig. 13. Desplazamientos de la boya y del tanque - frecuencia 1.1Hz

En las siguientes figuras se muestra los resultados de la simulación en contraste con los resultados experimentales.

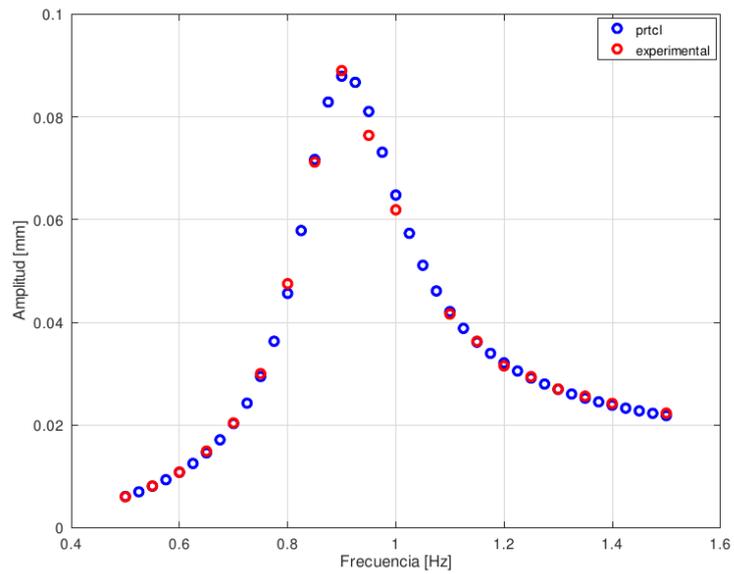


Fig. 14. Amplitud del desplazamiento de la boya para diferentes valores de frecuencia.

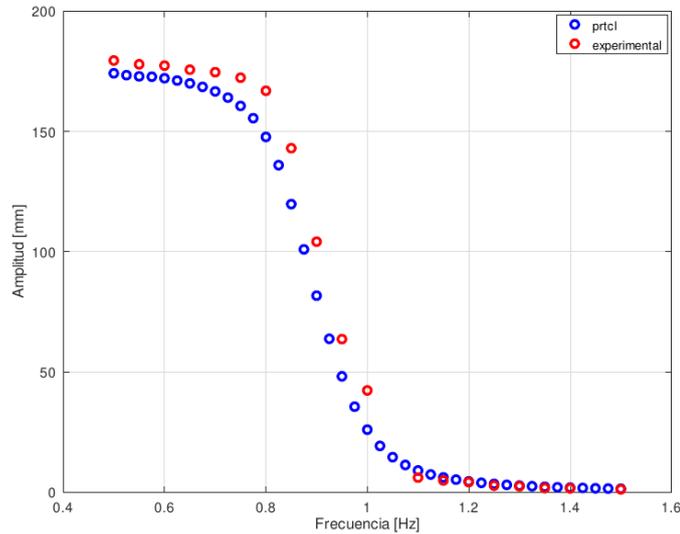


Fig. 15. Diferencia de Fase entre el desplazamiento de la boya y el desplazamiento del tanque para diferentes frecuencias.

5 Conclusiones

Se puede ver que los resultados numéricos tienen una tendencia similar en la comparativa de las amplitudes y los desfases para diferencias de frecuencias, pero los valores son ligeramente diferentes, diferencia que se ve, más evidentemente, en la gráfica comparativa de la diferencia de fase vs frecuencia. Estas diferencias se pueden atribuir a la selección del valor del coeficiente de arrastre y el coeficiente de masa agregada, que para este trabajo se tomó como $C_d=0.22$ y $C_a=0.52$ aproximadamente. Además, al momento de la simulación, en las gráficas de desplazamiento de la boya y de desplazamiento del tanque, se ve un fuerte transitorio inicial, esto se debe a la brusquedad del inicio del movimiento del tanque. Para subsanar esto se deberá probar, en la simulación, un inicio del movimiento del tanque de manera gradual.

Como futuros trabajos se realizará el acoplamiento fluido-estructura de la boya con el fluido, utilizando la librería “prtclsys” con el código de simulación por el método de volúmenes finitos Code_Saturne para la determinación más precisa de las fuerzas que transmite el fluido hacia la boya durante el movimiento del tanque.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido llevado a cabo gracias al apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, el Centro de Investigación en Métodos Computacionales, La Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, Proyecto CAI+D-2020-50620190100110LI), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, Argentina, Proyecto PICT-2018-01607) y la Facultad de ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste

Referencias

- [1] S. Costarelli, “An embedded strategy for the analysis of fluid structure interaction problems”, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering* vol.300 1 March 2016 pp106-128.
- [2] S. Costarelli, “Algoritmos de alta performance en unidades de procesamiento gráfico (GPU) aplicados a la dinámica de fluidos computacional”. Tesis de Doctorado- Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas – Universidad Nacional del Litoral, 2017.
- [3] J.A. Flores Arriagaad, “Determinación experimental del comportamiento dinámico de un péndulo invertido bajo condiciones de vibración forzada en un fluido viscoso”, Trabajo Final de Graduación – Facultad de ingeniería – Universidad de Santiago de Chile. 2016.
- [4] M.A. Storti, “System of particles with restrictions”, Centro de Investigación en Métodos Computacionales – Universidad Nacional del Litoral-Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. 2022