

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ESFUERZOS EN ESCALERAS HELICOIDALES USANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Angel O. Fernández <sup>a</sup>, Marco R. Freiburger <sup>a</sup>, Javier A. Duarte <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Oberá, Misiones, Argentina.*

<sup>b</sup> *LIC, FI-UNaM, Juan Manuel de Rosas 325, Oberá, Misiones, Argentina*

e-mails: ang\_fer125@yahoo.com.ar, marcofreibrger16@gmail.com, duartej@fio.unam.edu.ar

---

### **Resumen**

El análisis estructural en el espacio está definido por grados de libertad que comprenden en el espacio cartesiano desplazamientos en tres direcciones y rotaciones alrededor de dichas direcciones. Cuando la geometría de una estructura es de tal complejidad que necesita considerar la totalidad de dichos grados de libertad toma importancia la adecuada selección de las herramientas de análisis utilizadas. Esto va sumado al hecho que estructuras como por ejemplo aquellas ejecutadas en hormigón armado, poseen un periodo elástico reducido lo cual puede ser causa para elegir estudiar patrones de comportamiento post fisuración. El objetivo del presente trabajo se enfoca en presentar una simulación numérica de una escalera helicoidal de material rígido estructural para la cual se ha definido FEM (Finite element method) como herramienta de análisis. Se espera obtener para la estructura analizada resultados comparables con un método manual de cálculo, utilizando el modelo de arcos que propone Heyman [1] para escaleras helicoidales.

**Palabras Clave** – *Abaqus, CAE, Elementos finitos, Escalera, Escalera helicoidal, FEM, Hormigón, Hormigón armado, MEF, Período elástico.*

---

### **1. Introducción**

El análisis estructural en el espacio está definido por grados de libertad que comprenden en el espacio cartesiano desplazamientos en tres direcciones y rotaciones alrededor de dichas direcciones. Cuando la geometría de una estructura es de tal complejidad que necesita considerar la totalidad de dichos grados de libertad toma importancia la adecuada selección de las herramientas de análisis utilizadas. Esto va sumado al hecho que estructuras como por ejemplo aquellas ejecutadas en hormigón armado, poseen un periodo elástico reducido lo cual puede ser causa para elegir estudiar patrones de comportamiento post fisuración. El objetivo del presente trabajo se enfoca en presentar una simulación numérica de una escalera helicoidal de material rígido estructural para la cual se ha definido FEM (Finite element method) como herramienta de análisis. Se espera obtener para la estructura analizada resultados comparables con un método manual de cálculo, utilizando el modelo de arcos que propone Heyman [1] para escaleras helicoidales.

## 2. Metodología

### 2.1. MEF (Método de elementos finitos)

El método de elementos finitos es un método numérico para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complejas utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

Permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. Se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal del problema sean conocidas de antemano.

Este método hace posible la resolución de problemas de dominios continuos discretizándolos en un número finito de elementos (de ahí obtiene su nombre), cuyo comportamiento está descrito por ciertos parámetros, también finitos.

Estos elementos están conectados entre sí mediante nodos ubicados en su contorno, los desplazamientos que estos sufran serán las incógnitas, se toma un conjunto de funciones que definan estos desplazamientos y otro que defina sus deformaciones. Luego se define un sistema de fuerzas que equilibren al sistema, que deben estar aplicadas únicamente en los nodos.

Este método es aproximado, ya que reemplazamos un medio continuo por un número finito de elementos, teniendo mayor precisión a medida que se aumenta la cantidad de los mismos, mediante un refinamiento en el mallado, llegando a ser exacto en el hipotético caso de que lo dividamos en infinitos elementos (siendo un caso completamente absurdo e imposible).

Debido a la gran cantidad de variables y ecuaciones que se utilizan, el método está pensado para ser usado en computadoras, ya que sería inviable resolverlo a mano.

Para aplicar el método de elementos finitos primeramente se procede a discretizar el medio continuo, pudiendo utilizar distintos tipos de elementos, como ser tetraedros o hexaedros.

Se desarrolla la representación isoparamétrica de los elementos por medio de las funciones de forma o también llamadas funciones de interpolación, que servirán para realizar el cambio de coordenadas locales a globales y viceversa, necesarias para las interpolaciones valores de los puntos que se encuentren entre nudos, por dar un ejemplo. Se confeccionan sus correspondientes matrices jacobianas, compuestas por las distintas derivadas parciales de las funciones de forma de cada elemento, y se calculan sus determinantes.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

En cuanto a la matriz constitutiva [D], también denominada matriz de elasticidad, contiene las propiedades mecánicas del material en cuestión, ya que está en función del módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson, también nos indica si el material es isótropo o anisótropo (por su simetría o ausencia de ella), si está sometido a una variación de temperatura (dilatación térmica) y la orientación que tendrán las tensiones presentes en él. En este caso consideramos el material como isótropo, sin dilatación térmica y sometida a un estado tensional espacial, por lo tanto la matriz [D] tendrá la forma:

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$E = 4700\sqrt{f'_c} \quad \nu = 0,2$$

Esta matriz es única para todos los elementos, ya que toda la está compuesta del mismo material, considerado como estructural.

La matriz de caracterización geométrica [B] depende de la forma de los elementos (tal como indica su nombre, de la geometría de los mismos), para cada elemento tenemos una matriz conformada por las submatrices correspondientes a cada nodo:

$$[B] = \det[J] [B_i \quad B_j \quad \dots \quad B_n]$$

Estamos en condiciones de conformar la matriz de rigidez [K], que depende tanto de las propiedades geométricas (B) del elemento como de las propiedades mecánicas del material (D) y se define para cada elemento e como:

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] \int dx \cdot dy \cdot dz$$

donde la integral representa el volumen de cada elemento.

Las matrices de rigidez de todos los elementos se ensamblan en una sola matriz de rigidez global [K] en la cual se contemplan todos los nodos existentes en el modelo.

Podemos reducir el tamaño de la matriz de rigidez aplicando las condiciones de frontera o de borde, esto implica eliminar del sistema de ecuaciones las correspondientes a los grados de libertad que hayamos restringido, debido a que sabemos que su desplazamientos será nulo.

Al tener la matriz de rigidez [K], haberle aplicado las condiciones de frontera y conociendo el sistema de fuerzas externas actuantes (siempre en los nodos) ya podemos confeccionar el sistema de ecuaciones a resolver basándonos en la ley de Hooke:

$$[K][d] = [F]$$

Donde [d] es el vector de desplazamientos y [F] el vector de fuerzas externas aplicadas al sólido.

$$[K] \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

En el cual la incógnita son los desplazamientos [d], teniendo [F] como dato del problema y [K] calculada a partir de la geometría y propiedades mecánicas del sólido.

Una vez resuelto el SEL conocemos los desplazamientos y podemos calcular las tensiones de cada elemento con la siguiente ecuación:

$$[\sigma_e] = [D][B_e][d_e]$$

Siendo [d<sub>e</sub>] el vector desplazamiento del elemento e, que contiene a su vez los desplazamientos de los tres nodos que lo componen.

## 2.2. Modelado de la escalera mediante software

La confección del modelo se realizó mediante un software CAE que utiliza el método de elementos finitos (FEM), siguiendo el algoritmo indicado a continuación:

- Adopción de la geometría del modelo.
- Diseño geométrico del modelo mediante software CAD.
- Importación la geometría al software CAE.
- Definición de las propiedades de los materiales a utilizar.
- Definición de las cargas y condiciones de contorno.
- Definición del mallado del modelo de la escalera.
- Definición del caso (tipo de análisis, duración, etc.) y selección de las variables de salida.
- Definición de la tarea y modificación parámetros de hardware y precisión del cálculo.
- Exportación de resultados.

## 2.3. Método manual de cálculo

Se ha propuesto un planteo de cálculo de reacciones y solicitaciones en la escalera helicoidal basado en trabajos previos de análisis límite de escaleras helicoidales de fábrica según Heyman [1] y García Ares [2]. Este método supone algunas hipótesis propias que se toman para las condiciones de contorno, para el material y para su geometría.

Consideraciones sobre la geometría:

- Se adopta la teoría de superficie de empujes mínima, proveniente del análisis de estructuras de arco. El helicoide es una superficie reglada no desarrollable que viene definida por las ecuaciones paramétricas

$$x(r, \gamma) = r \cdot \cos(\gamma) \quad y(r, \gamma) = r \cdot \sin(\gamma) \quad z(r, \gamma) = \frac{h}{\gamma_d} \gamma$$

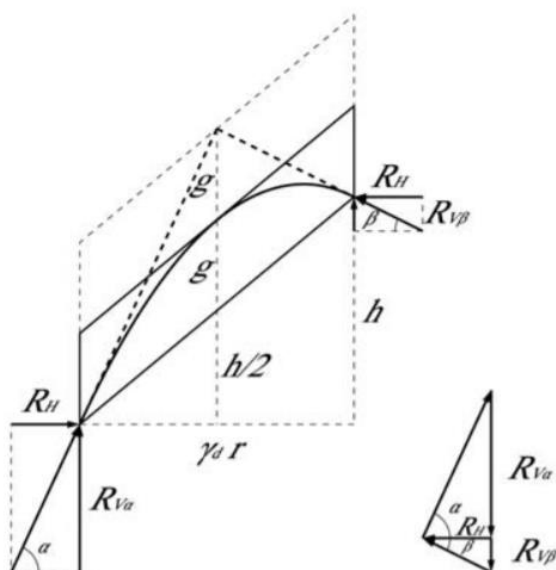
Consideraciones sobre el material:

- La fábrica no tiene resistencia a tracción.
- En los tamaños habituales de los edificios las tensiones que se dan son tan bajas que podemos considerar que la fábrica tiene una resistencia a compresión ilimitada.
- No es posible el fallo por deslizamiento.

Hipótesis sobre las condiciones de contorno:

- Consideraremos que la escalera está construida, confinada podríamos decir, dentro de un cilindro infinitamente rígido capaz de resistir y conducir al terreno cualquier empuje que la escalera pueda transmitirle.
- Consideraremos del mismo modo que los apoyos de los otros dos bordes no libres que nos quedan, es decir el arranque y el desembarco, podrán también soportar únicamente los empujes que les sean transmitidos por la escalera. Así podremos abordar el análisis aislando nuestra estructura del resto de la construcción.

Dentro del marco del análisis límite aplicado a las estructuras de fábrica, caracterizada por las tres hipótesis básicas que hemos visto, podemos enunciar el teorema fundamental de la seguridad del siguiente modo: si se puede encontrar un estado de esfuerzos de compresión dentro de la fábrica, en equilibrio con las acciones, la estructura será segura y no colapsará, según Heyman [1] y Huerta []. Al ser la estructura hiperestática existirán infinitos estados de equilibrio que no violan las hipótesis del material. Cada uno de ellos podrá ser representado por una línea de empujes. En el caso de estructuras tridimensionales, como lo es una escalera helicoidal, podemos hablar de superficies de empujes. Se utiliza el método de los cortes combinado con cálculo diferencial para buscar una solución de equilibrio, a través del análisis del corte desplegado.



$$R_H = \frac{r^2 \gamma_d^2 \rho}{8} \partial r \quad R_{V\alpha} = \frac{r \gamma_d \rho (4g + h)}{8} \partial r \quad R_{V\beta} = \frac{r \gamma_d \rho (4g - h)}{8} \partial r$$

$$f(x) = \frac{-4g}{r^2} x^2 + \frac{(4g+h)}{r \gamma_d} x \quad \text{Longitud de empuje}$$

Para convertir el análisis plano, se introduce una fuerza horizontal de magnitud constante a largo del borde del helicoides.

$$E_r(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_H n \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma_d \pi}{2n}\right)}{\gamma_d r} = \frac{R_H}{r} = \frac{r \gamma_d^2 \rho}{8} \partial r$$

Es posible definir una de las infinitas superficies de empujes en equilibrio con las cargas y contenidas dentro de la escalera que estará constituida por las infinitas líneas de empujes de cada uno de los cortes infinitesimales considerados. Podemos entonces afirmar, a la luz del teorema fundamental de la seguridad aplicado a las estructuras de fábrica, que una estructura helicoidal como la analizada es segura y no colapsará. La superficie de empujes, que en nuestro caso es la que corresponde a un empuje horizontal mínimo en el arranque y desembarco queda definida del siguiente modo:

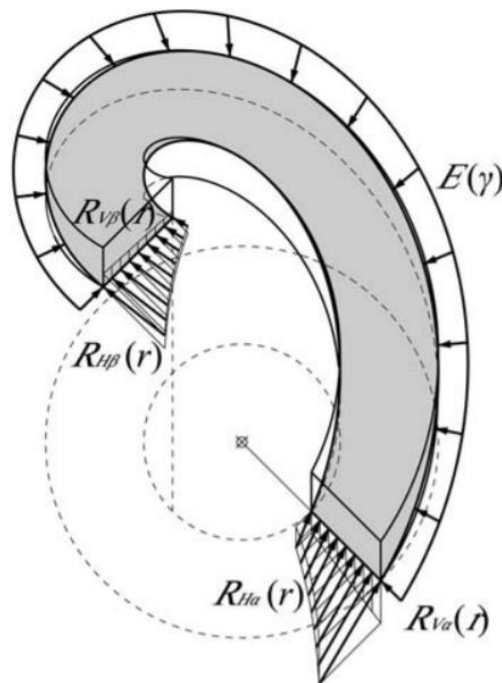
$$x(r, \gamma) = r \cdot \cos(\gamma) \quad y(r, \gamma) = r \cdot \sin(\gamma) \quad z(r, \gamma) = \frac{-4g}{\gamma_d^2} \gamma^2 + \frac{(4g+h)}{\gamma_d} \gamma$$

$$R_H = \frac{r^2 \gamma_d^2 \rho}{8} \quad R_{V\alpha} = \frac{r \gamma_d \rho (4g+h)}{8} \quad R_{V\beta} = \frac{r \gamma_d \rho (4g-h)}{8}$$

Integrando el empuje horizontal en el radio de la escalera y proyectando el vector del empuje horizontal plano sobre el helicoides, se obtiene su expresión final.

$$E(\gamma) = -\frac{\gamma_d^2 \rho (r_1^2 - r_2^2)}{16} \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{(4g+h)\gamma_d - 8\gamma g}{r_2 - \gamma_d^2}\right)\right)$$

Para tener un margen de seguridad, se adopta el empuje máximo para diseño a posteriori.



Para calcular las solicitaciones basta con conocer las reacciones y el sistema de cargas de la estructura.

$$\begin{aligned}
 V(\gamma) &= R_{v\alpha} - q_{eq} \cdot S(\gamma) \\
 M_{flector}(\gamma) &= M_x \cdot \cos(\gamma) + M_y \cdot \text{sen}(\gamma) \\
 M_{torsor}(\gamma) &= M_x \cdot \text{sen}(\gamma) + M_y \cdot \cos(\gamma) \\
 M_{t.radial}(\gamma) &= M_z
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es la rotación respecto al eje “x”, S la longitud de curva, y  $M_i$  el momento cuyo vector tiene la dirección “i”.

Se chequea la estabilidad global de la estructura, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sum F_v &= R_{v\alpha} + R_{v\beta} + q_{eq} \cdot l_c = 0 \\
 R_{v\alpha} + R_{v\beta} &= -q_{eq} \cdot l_c \\
 R_{v\alpha} + R_{v\beta} &= -\rho_{eq} \cdot A \cdot l_c
 \end{aligned}$$

donde  $\rho_{eq}$  es el peso específico equivalente, A la sección de la placa helicoidal, y  $l_c$  la longitud total de la curva helicoidal central.

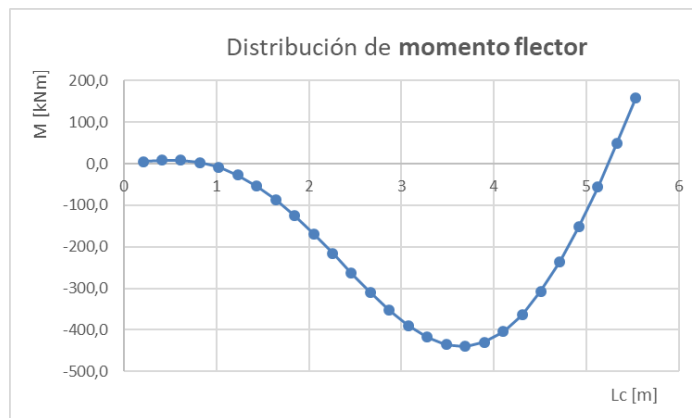
### 3. Resultados

$e_{eq}$ [m]	$\gamma$ [rad]	e [m]	$r_2$ [m]	$r_1$ [m]	$r_m$ [m]	$\rho$ [N/m <sup>3</sup> ]	H [m]	$L_c$ [m]	$A_p$ [m <sup>2</sup> ]
0,15608	4,712389	0,1	1,5	0,5	1	64500	2,9	5,5332	4,712

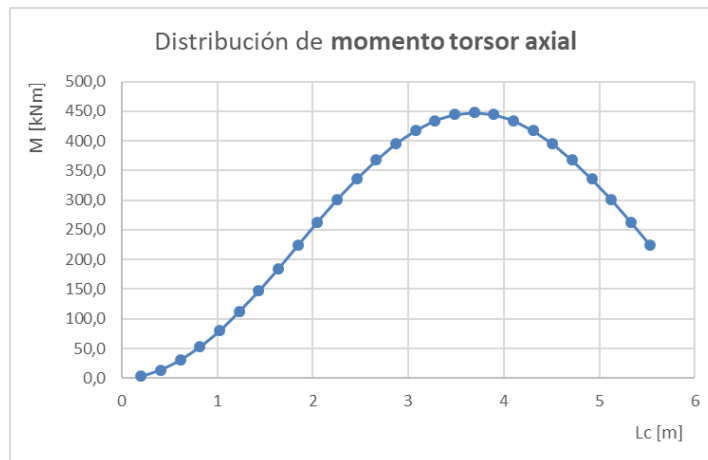
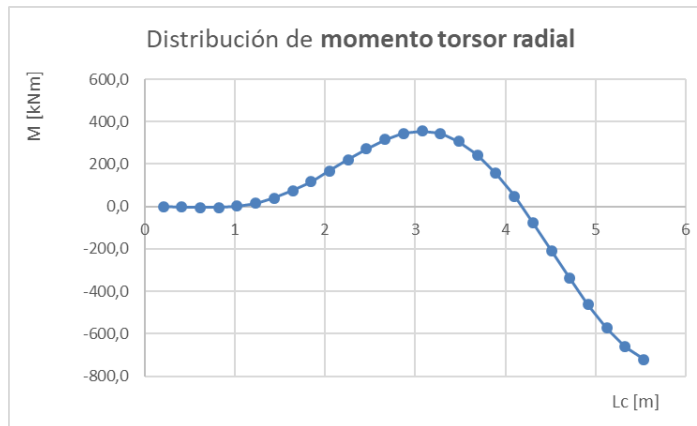
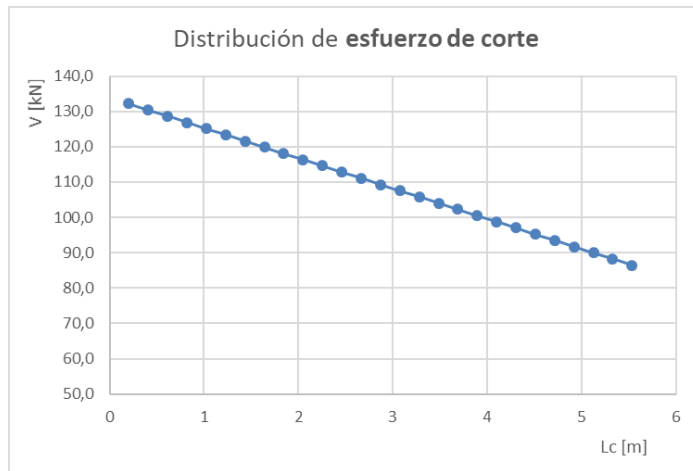
Radio interno		Radio externo		Reacciones promedio			
$R_{v,a}$ [N/m]	$R_{v,b}$ [N/m]	$R_{v,a}$ [N/m]	$R_{v,b}$ [N/m]	$R_{v,a}$ [N/m]	$R_{v,b}$ [N/m]	$R_{h,b}$ [N/m]	E ( $\gamma$ ) [N/m]
66950,8	-43230,7	200852,5	-129692,2	133901,6	-86461,5	223800,99	179040,8

Equilibrio		
$R_{v,a} + R_{v,b}$ [N]	$\rho \cdot A \cdot L_c$ [N]	$\varepsilon$ [N]
47440,2	47440,18625	0,0

$L_c$ [m]	$M_f$ [kNm]	$V$ [kN]	$M_{t\text{ radial}}$ [Nm]	$M_{t\text{ axial}}$ [Nm]
0,205	5,5	132,1	-1,0	3,4
0,41	8,9	130,4	-3,3	13,5
0,615	8,5	128,6	-5,2	30,0
0,82	3,0	126,9	-4,4	52,4
1,025	-8,8	125,1	1,9	79,9
1,23	-27,6	123,4	16,1	111,9
1,435	-53,5	121,6	39,9	147,3
1,64	-86,3	119,8	73,8	184,9
1,845	-125,1	118,1	117,1	223,8
2,05	-168,7	116,3	167,3	262,7
2,255	-215,5	114,6	220,4	300,3
2,46	-263,2	112,8	271,5	335,7
2,665	-309,8	111,1	314,9	367,7
2,87	-352,7	109,3	344,8	395,2
3,075	-389,4	107,5	355,9	417,6
3,28	-417,6	105,8	344,0	434,1
3,485	-434,9	104,0	306,8	444,2
3,69	-439,5	102,3	243,5	447,6
3,895	-429,8	100,5	155,9	444,2
4,1	-404,7	98,8	47,7	434,1
4,305	-364,0	97,0	-75,7	417,6
4,51	-307,6	95,2	-207,3	395,2
4,715	-236,3	93,5	-339,3	367,7
4,92	-151,7	91,7	-463,7	335,7
5,125	-55,8	90,0	-573,0	300,3
5,33	48,9	88,2	-660,8	262,7
5,535	159,1	86,5	-722,0	223,8







#### 4. Conclusiones

Se pudo simular numéricamente para una escalera de material rígido  
 Pudieron ser comparables ambos modelos, comentar grados de libertad en cada uno

Consideraciones a evaluar a futuro (fisuración, concentración de tensiones, compatibilidad de modelos, mejorar aproximación el prototipo por medio de condiciones físicas, modelación que incluya armadura)

## **Referencias**

- [1] Heyman
- [2] García Ares
- [3]