JORNADAS DE INVESTIGACIÓN, DESARROLLO TECNOLÓGICO, EXTENSIÓN, VINCULACIÓN Y MUESTRA DE LA PRODUCCIÓN

Vol1-Año 2019-**ISSN 2591-4219**

Herramientas matemáticas para el análisis en frecuencia

Anocibar, Hector R. [b], Frank Damián A. [a], Fernández Jorge N. [a], Gros Aquiles R. [a], Neudeck Argalas Diego E. [a], Olsson Jorge A. [b]

[a] *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Oberá, Misiones, Argentina.*
[b] *GID-IE, FI-UNaM, Oberá, Misiones, Argentina.*
FI-UNaM, Juan Manuel de Rosas 325, Oberá, Misiones, Argentina
e-mails: anocibar@fio.unam.edu.ar , frankdamian3095@gmail.com , , nahuel090893@gmail.com
aquiles7gros@gmail.com , neudeck004@gmail.com .

Resumen

Fourier sostiene que toda onda periódica puede descomponerse en la suma de señales senoidales, de esto surge el análisis de la frecuencia. Este trabajo abarca las herramientas matemáticas para poder obtener el espectro de una señal. Es decir, que se tendrán instrumentos para la representación gráfica de la onda en el dominio temporal (oscilograma) y el espectral (análisis de espectro). La "transformada rápida de Fourier" es la herramienta más adecuada para llevar a cabo un análisis espectral, a causa de su rapidez. También abarcamos conceptos como ser discretización, muestreo, ruido y aliasing.

Palabras Clave *– Dominio del tiempo, Frecuencia, Muestreo, Ondas, Señales, Transformada de Fourier.*

1. Introducción

La transformada de Fourier, es una herramienta matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Este artilugio matemático es reversible, siendo capaz de pasar del domino del tiempo al dominio de la frecuencia.

2. Desarrollo

Generalmente las señales se representan a través de dos ejes, el horizontal para la representación del tiempo y el vertical para la amplitud; con esto es posible la observación de las variaciones de la amplitud de la señal en función del tiempo.

Fourier sostiene que toda forma de onda periódica puede descomponerse en la suma de señales senoidales [1]. En otras palabras, se pueden descomponer en una suma de componentes senoidales de diversas frecuencias y amplitudes como se observa en los ejemplos de la Figura 1.

*Autor en correspondencia.

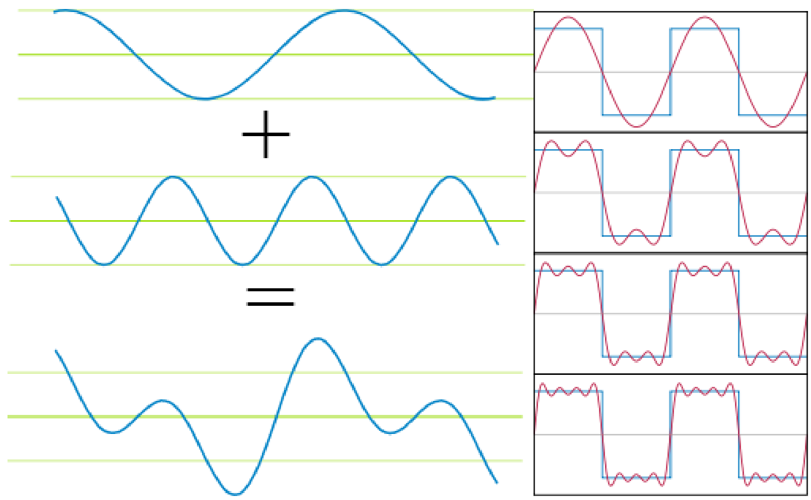

Figura 1: Obtención de una señal a partir de la suma de señales senoidales [2].

De lo anterior surge el análisis de la frecuencia, cuando en un gráfico ubicamos en el eje horizontal el valor de frecuencia para cada senoidal, de menor a mayor; a la vez que observamos, en el eje vertical, las variaciones de amplitud para cada una de las frecuencias o grupos de frecuencias analizadas, esto podemos ver en la siguiente figura.

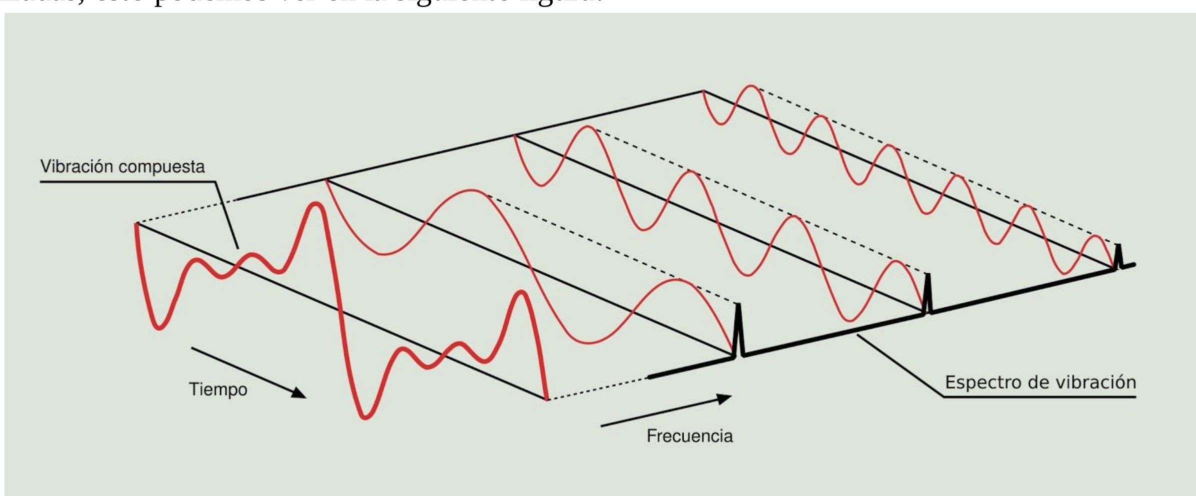

Figura 2: Descomposición de una señal en las frecuencias que la conforman [2].

A su vez, mediante el previo conocimiento de las diferentes frecuencias asociadas para una determinada señal, en relación a su variación de amplitud relativa con respecto a las demás en función del tiempo, es perfectamente posible la representación gráfica del oscilograma. Es decir, la representación gráfica de las propiedades de la señal puede visualizarse en dos dominios, el temporal (oscilograma) y el espectral (análisis de espectro), y, de hecho, el pasaje de un modo al otro podrá llevarse a cabo mediante la ecuación de Fourier. Sin embargo, en la representación digital, la transformada de Fourier se efectúa por medio de un atajo matemático, denominado "transformada rápida de Fourier" más conocida por FFT (Fast Fourier Transform) que es una versión más rápida de la transformada de Fourier discreta, la cual transforma una señal discreta en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

A causa de su rapidez, es la herramienta más adecuada para llevar a cabo un análisis espectral. Cualquier algoritmo para calcular la FFT contiene un conjunto de coeficientes espectrales, armónicos, que se pueden entender como muestras de la correspondiente función espectral continua.

Una de las aplicaciones del análisis espectral es el de reconocer señales que no son posibles en el dominio del tiempo [3], como ser la combinación de señales senoidales como se muestra en la Figura 3 y 4.

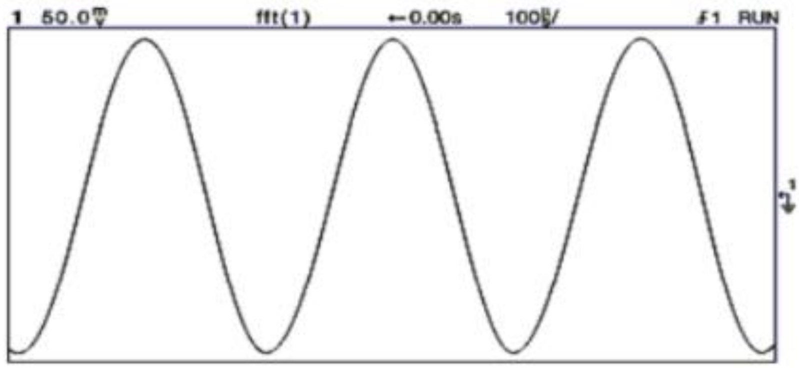

Figura 3: Señal senoidal conformada por dos señales senoidales [3].

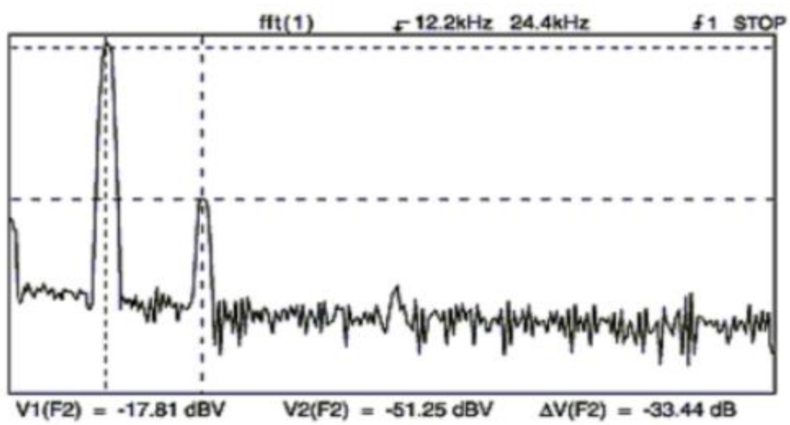

Figura 4: FFT de la señal de la Figura 3 [3].

La señal de Figura 3 es una senoidal conformada por dos senoidales de frecuencias muy próximas, al analizarla en el dominio del tiempo es imposible percatarse de esto, pero al analizarla en el dominio de la frecuencia se puede observar que es la combinación de dos señales de diferentes frecuencias.

A continuación, en la Figura 5 se observan dos ondas sinusoidales, no relacionadas armónicamente, son inestables cuando se ven en el dominio del tiempo. Esto es difícil de reconocer en el dominio del tiempo, por lo tanto, se analiza en el dominio de la frecuencia.

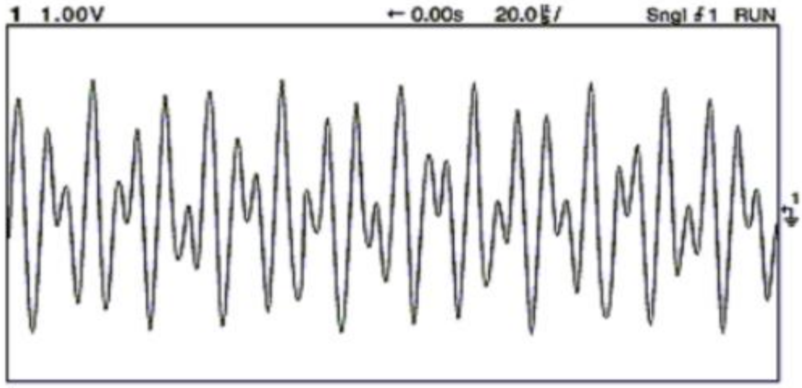

Figura 5: Una señal de dos tonos en el dominio del tiempo [3].

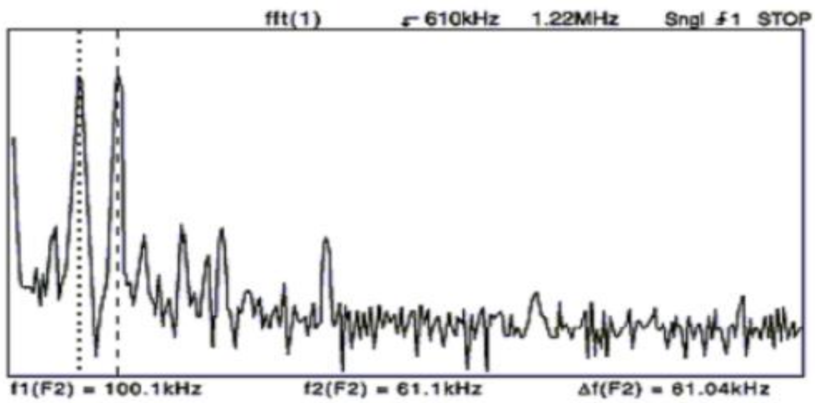

Figura 6: FFT de la señal de la Figura 5 [3].

En la Figura 6 se puede identificar fácilmente las dos ondas presentes en la señal de la Figura 5, realizando un análisis en el dominio de la frecuencia.

2.1. Señales periódicas:

Una función f(x) se denomina periódica si existe un número entero mínimo (p) tal que f(x±p)=f(x), y a (p) se le denomina periodo de la función f(x). Esto es equivalente a decir que la función se repite idéntica cada (p) intervalos.

Como ejemplo de funciones periódicas simples tenemos las funciones:

$$\mathrm{y} = \operatorname{sen}(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathrm{y} = \cos(x) \qquad \textbf{(2)}$$

ambas de periodo 2π.

De forma general la función:

$$\mathrm{y} = \mathrm{R} * \cos(nx - \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

es una función periódica de periodo 2π/n, de fase ϕ, de amplitud R y de frecuencia n/2π

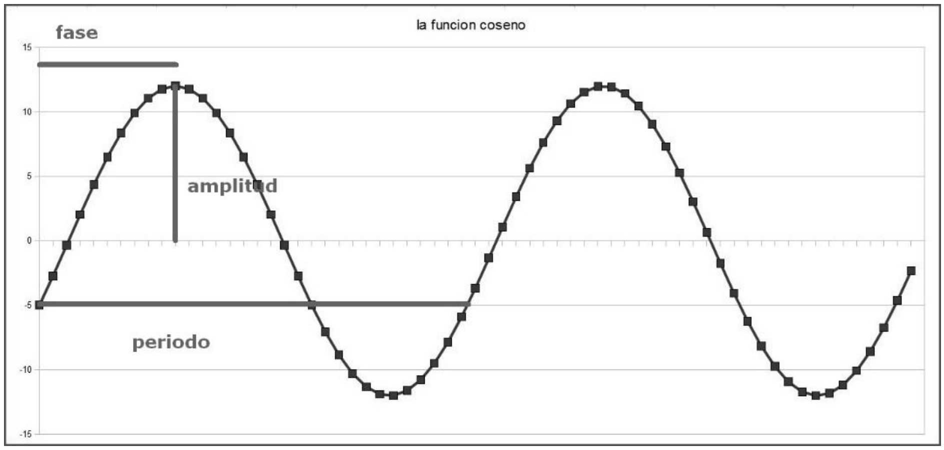

Figura 7: Discretización de señal periódica [4].

Esta función se puede escribir también en la forma:

$$y = a * \cos(nx) + b * \mathrm{sen}(nx) \qquad \textbf{(4)}$$

Para comprobarlo aplicamos la fórmula para el coseno de la suma de dos ángulos y tendremos

$$y = R * \cos(nx - \varphi) = R[\cos(nx) * \cos(\varphi) + \mathrm{sen}(nx) * \mathrm{sen}(\varphi)] \qquad \textbf{(5)}$$

recordando la forma que toman el coseno, seno y tangente, del ángulo ϕ, opuesto al cateto b, en un triángulo· rectángulo de hipotenusa R y catetos a y b. Tendremos:

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{R} \quad \mathrm{sen}(\varphi) = \frac{b}{R} \quad \tan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

y sustituyendo en la suma obtendremos la segunda forma de expresión planteada.
Cuando disponemos de esta segunda forma y queremos pasar a la primera, emplearemos:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \textbf{(7)}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \textbf{(8)}$$

Todavía existe otra manera de escribir la función y es con notación de número complejo de acuerdo con la formulación de Euler.

$$cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\sin(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2i} \qquad \textbf{(10)}$$

por lo tanto

$$\mathrm{y} = \mathrm{a} * \cos(nx) + \mathrm{b} * \sin(nx) \qquad \textbf{(11)}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2} + \mathrm{b}\frac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2\mathrm{i}} \qquad \textbf{(12)}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{a}\frac{\left(\mathrm{a} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{i}}\right)^{inx}}{2} + \mathrm{b}\frac{\left(\mathrm{a} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{i}}\right)^{-inx}}{2\mathrm{i}} \qquad \textbf{(13)}$$

si utilizamos C=(a+b/i)/2 y tenemos en cuenta que 1/i=-i entonces podemos emplear:

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{bi}}{2} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{C}^{*} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{bi}}{2} \qquad \textbf{(14)}$$

siendo C y C* complejos conjugados.
Por lo tanto, disponemos de las expresiones:

$$\mathrm{y} = \mathrm{R}\cos(nx - \varphi) = \mathrm{a}\cos(nx) + \mathrm{b}\,\mathrm{sen}(nx) = \mathrm{C}^{inx} + \mathrm{C}^{*-inx} \qquad \textbf{(15)}$$

C se puede escribir de formas distintas según que parámetros utilicemos:

$$\mathrm{C}^{*} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{bi}}{2} \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{bi}}{2} \qquad \textbf{(16)}$$

$$\mathrm{C}^{*} = \frac{\mathrm{R}}{2}(\cos(\gamma) + i\sin(\gamma)) \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}}{2}\left(\cos(\gamma) - i\,\mathrm{sen}(\gamma)\right) \qquad \textbf{(17)}$$

$$\mathrm{C}^{*} = \frac{\mathrm{R}}{2}\left(\mathrm{e}^{i\gamma}\right) \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}}{2}\left(\mathrm{e}^{-i\gamma}\right) \qquad \textbf{(18)}$$

donde

$$\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{19}$$

$$\gamma = \tan\left(-\frac{b}{a}\right) \tag{20}$$

En matemáticas, la transformada discreta de Fourier o DFT (del inglés, discrete Fourier transform) es un tipo de transformada discreta utilizada en el análisis de Fourier. Transforma una función matemática en otra, obteniendo una representación en el dominio de la frecuencia, siendo la función original una función en el dominio del tiempo. Pero la DFT requiere que la función de entrada sea una secuencia discreta y de duración finita. Dichas secuencias se suelen generar a partir del muestreo de una función continua, como puede ser la voz humana. Al contrario que la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT), esta transformación únicamente evalúa suficientes componentes frecuenciales para reconstruir el segmento finito que se analiza. Utilizar la DFT implica que el segmento que se analiza es un único período de una señal periódica que se extiende de forma infinita; si esto no se cumple, se debe utilizar una ventana para reducir los espurios del espectro. Por la misma razón, la DFT inversa (IDFT) no puede reproducir el dominio del tiempo completo, a no ser que la entrada sea periódica indefinidamente. Por estas razones, se dice que la DFT es una transformada de Fourier para análisis de señales de tiempo discreto y dominio finito. Las funciones sinusoidales base que surgen de la descomposición tienen las mismas propiedades [5].

La entrada de la DFT es una secuencia finita de números reales o complejos, de modo que es ideal para procesar información almacenada en soportes digitales. En particular, la DFT se utiliza comúnmente en procesado digital de señales y otros campos relacionados dedicados a analizar las frecuencias que contiene una señal muestreada, también para resolver ecuaciones diferenciales parciales, y para llevar a cabo operaciones como convolución o multiplicaciones de grandes números enteros. Un factor muy importante para este tipo de aplicaciones es que la DFT puede ser calculada de forma eficiente en la práctica utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform).

Los algoritmos FFT se utilizan tan habitualmente para calcular DFTs que el término "FFT" muchas veces se utiliza en lugar de "DFT" en lenguaje coloquial. Formalmente, hay una diferencia clara: "DFT" hace alusión a una transformación o función matemática, independientemente de cómo se calcule, mientras que "FFT" se refiere a una familia específica de algoritmos para calcular DFTs.

2.2.Discretización:

Los sistemas de control de tiempo discreto (STD) [6], son sistemas dinámicos para los cuales una o más de sus variables solamente son conocidas en ciertos instantes. El hecho de que algunas funciones de tiempo del STD varíen discretamente, puede ser debido a una característica inherente al sistema, o que provenga dado el proceso de muestreo de alguna señal.

La discretización de una señal es el proceso que agrega una determinada codificación a la señal muestreada.

2.3. Muestreo:

La manera habitual de obtener una representación discreta en el tiempo de una señal continua es tomando muestras cada un determinado período de tiempo.

El sistema que permite llevar a cabo la operación es un conversor continuo a discreto ideal, pero en la práctica, la operación de muestreo se lleva a cabo con un conversor analógico digital. La diferencia entre ambos radica principalmente en la resolución de los bits, la linealidad de los pasos de cuantización, la necesidad de circuitos mantenedores, y la frecuencia de muestreo máxima que se puede alcanzar.

En la figura 9 se puede ver el proceso de muestreo de la señal donde se obtiene una función discreta.

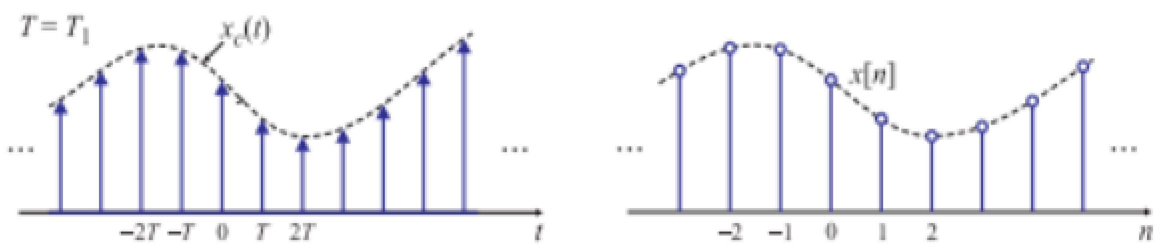

Figura 9: Proceso de muestreo de una señal continua [4].

A la izquierda se encuentra la señal continua a analizar y a la derecha el resultado de la discretizacion de la misma. Una aclaración importante es que generalmente, la operación de muestreo no se puede revertir, es decir, una vez que se posee la señal discretizada, es imposible volver a obtener la señal continua original. Esta ambigüedad, inherente al proceso, puede ser removida restringiendo el tipo de señales aplicadas al muestreador.

2.4. Ruido:

El ruido es una señal aleatoria, generalmente de alta frecuencia, pero con un ancho de banda también muy amplio, que se superpone a la señal que se está midiendo. Este ruido distorsiona la señal, y si la relación ruido-señal es muy alta, puede falsear totalmente los datos. El ruido puede ser debido a la red eléctrica, a movimientos de los cables y de las conexiones, a interferencias electromagnéticas producidas por los cables o al equipo que se está usando. Se puede evitar usando filtros.

2.5.Aliasing:

El problema del aliasing es inherente al muestreo de una señal cuyo contenido en frecuencia se extiende hasta altas frecuencias. Para poder detectar una frecuencia determinada f es necesario muestrear de forma que se tengan al menos dos puntos por ciclo, es decir, la frecuencia de muestreo fs debe ser fs > 2f. Fijada una fs, las frecuencias mayores de fs/2 (frecuencia de Nyquist) aparecerán en la señal muestreada como frecuencias menores de fs/2. Este problema resulta de la discretización de una señal continua. Con este proceso, la existencia de frecuencias muy altas puede ser mal interpretada si la velocidad de muestreo no es lo suficientemente elevada.

Para evitar el aliasing se emplea un filtro de paso-bajo. Pero los filtros no son perfectos, por lo que las medidas de frecuencia próximas a la de Nyquist se deben rechazar. En las figuras que aparecen a continuación se muestran dos ejemplos de las distorsiones que produce el aliasing sobre los espectros.

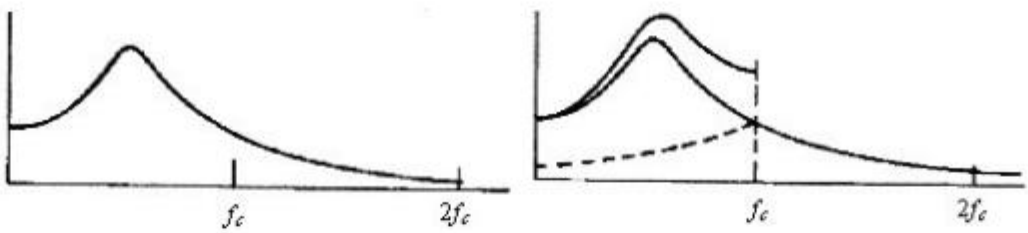

Figura 10: Distorsión producida por el aliasing en una señal con frecuencias superiores a la de Nyquist [3].

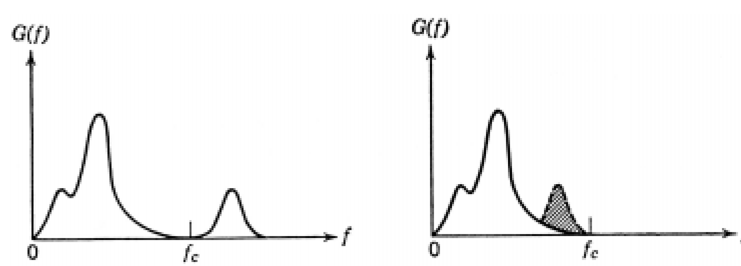

Figura 11: Comparación entre un autoespectro real y el mismo con aliasing [3].

Es ocasionado por el muestreo en el tiempo. Se soluciona empleando un filtro antialiasing (fc) y una frecuencia de muestreo de fs > 2fc. El filtro anti-aliasing lo que hace es eliminar las componentes de alta frecuencia de las señales analógicas medidas.

3. Conclusión:

Hemos descrito de una forma general y práctica la Transformada rápida de Fourier para su uso en señales continuas a través de la discretización de esta, mencionando el efecto que nos produce los distintos parámetros que intervienen en el cálculo de los espectros variantes en el tiempo.

Tomando los conceptos sobre la transformada de Fourier, se pueden emplear mediante un osciloscopio, el cual a partir de un proceso simple se puede obtener el espectro de una señal.

Y así evitar el uso de análisis matemático complejo, ya que con instrumentos de mediciones, se puede apreciar la señal en análisis ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

Agradecimientos:

Este trabajo ha sido llevado a cabo gracias al apoyo de los docentes de la catedra de Mediciones Eléctricas de la carrera Ingeniería Electrónica dictada en la Universidad Nacional de Misiones.

Referencias:

[1] Apunte: Análisis Espectral; Pablo Rabinovich.

[2] https://docplayer.es/12636020-Equipos-analizadores-de-senal-introduccion-analizadores-de-fourier-analizadores-de-espectros-heterodinos.html

[3] R. A. Witte, Hewlett-Packard Co., “Fourier Theory & Practice, Part II: Practice”, in Operating the HP 54600 Series Scope with Measurement/Storage Module

[4] http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-RodrigoBarco.pdf

[5] https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier_discreta

[6] http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-RodrigoBarco.pdf